ЗАДАНИЕ 3
Изгиб консольно-закрепленной балки
Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов
Определение размеров поперечного сечения балки

На консольно-закрепленной балку (рис. 1) действует сосредоточенная сила $F = 6$ кН, равномерно-распределенная нагрузка $q = 4$ кН/м, изгибающий момент $M = 16$ кН $\cdot$ м, a=2 м, b=6 м, c=2 м.
Для заданной схемы балки:
- построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M), найти M_{max};
- подобрать номер профиля двутавра и швеллера (сечение стальной балки) при допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа.

Исходные данные приведены в таблице 1, расчетную схему составить для на рисунка 1.

Решение

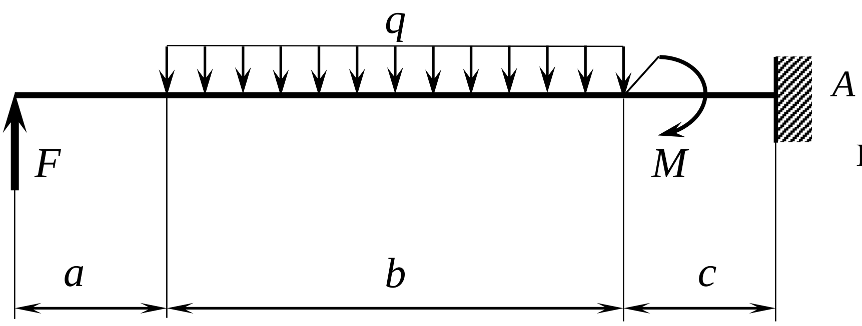
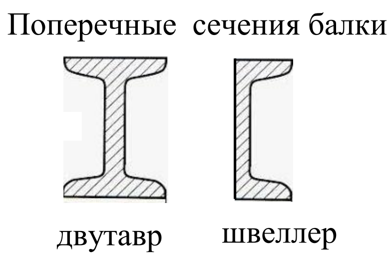


Рисунок 1



1. Разбиваем балку на отдельные участки, в пределах которых действие внешних сил приложенных к балке, постоянно. Таким образом, балка получилась разбита на три участка (рис. 2a). Принимаем правило знаков.

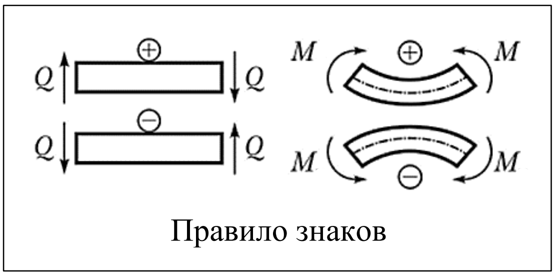
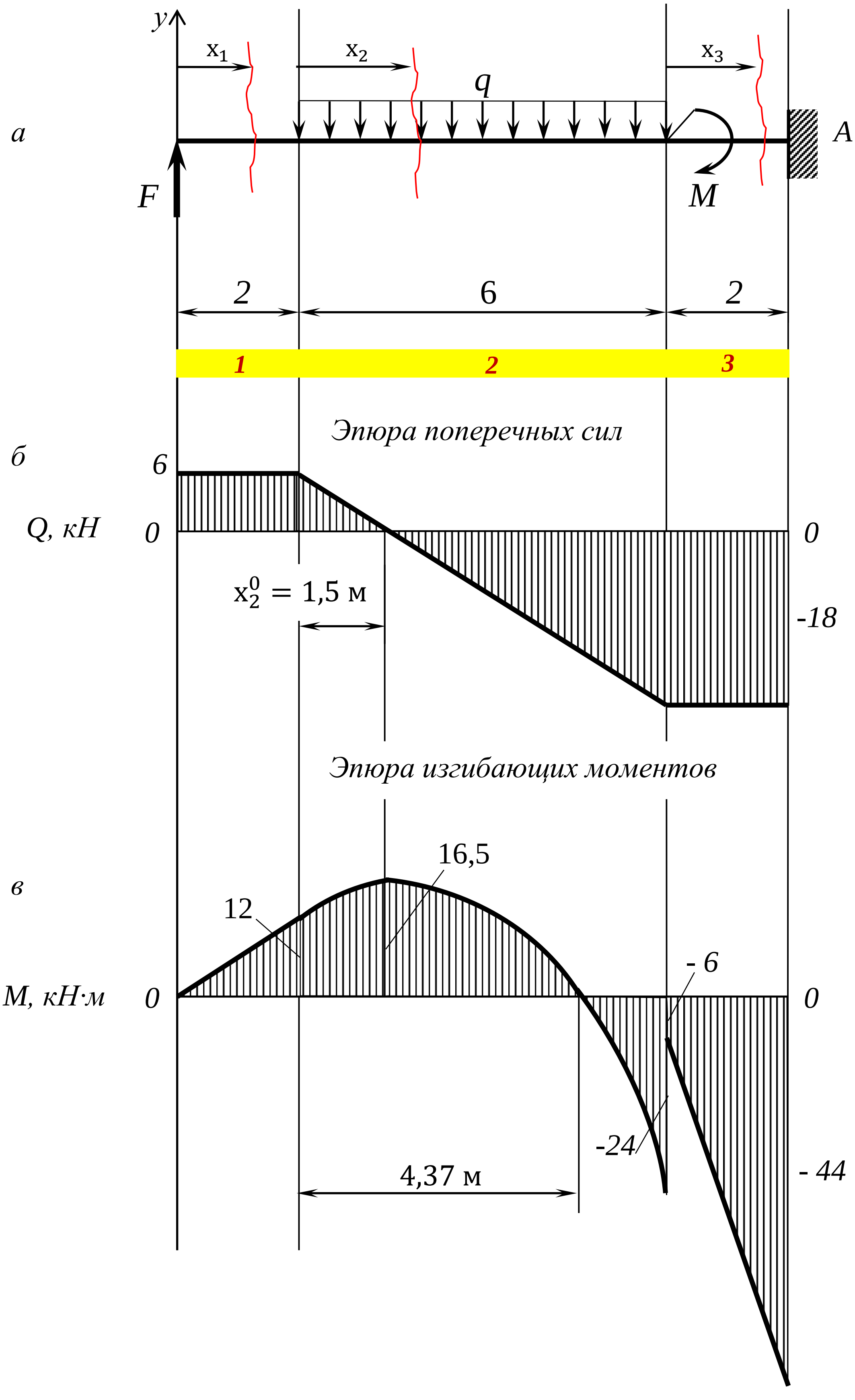


Таблица 1

№ варианта	*F, кН*	*M, кН·м*	*q, кН/м*	*a, м*	*b, м*	*c, м*
1	8	15	3	2	5	2
2	10	20	5	3	6	3
3	12	25	7	2	4	3
4	6	10	6	3	4	5
5	8	5	5	2	2	5
6	10	15	4	3	3	6
7	11	10	3	3	2	4
8	13	20	5	5	3	4
9	8	25	7	5	2	2
10	9	15	6	6	3	3
11	7	10	5	4	3	2
12	10	15	4	4	5	3
13	12	20	3	5	5	2
14	14	25	5	6	6	3
15	8	10	7	4	4	3
16	7	5	6	4	4	5
17	6	15	5	2	2	5
18	5	10	4	3	3	6
19	8	20	3	2	2	4
20	10	25	5	3	3	4
21	12	15	7	5	2	2
22	6	10	6	6	3	3
23	8	12	5	4	3	2
24	10	14	4	4	5	3
25	11	18	3	2	5	2
26	13	20	5	3	6	3
27	8	10	7	2	4	3
28	9	8	6	3	4	5
29	7	6	5	5	2	5
30	10	10	4	6	3	6



а
б
в
y
x1
x2
x3
q
F
M
A
2
6
2
1
2
3
Эпюра поперечных сил
6
Q, кН
0
0
-18
x2^0 = 1,5 м
Эпюра изгибающих моментов
16,5
12
M, кН·м
0
- 6
0
-24
- 44
4,37 м

Рисунок 2

2. Запишем уравнения для поперечной силы и изгибающих моментов на участках. Проводим произвольные сечения ***1-1***, ***2-2*** и ***3-3.***

На первом участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***1-1:*** $0 \leq x_1 \leq 2$

$$Q_1 = \sum F_{ky} = F = 6 \text{ (кН)}$$

$$M_1 = \sum M(F_k) = F \cdot x_1$$

При $x_1 = 0,\ M_1 = M_1 = 6 \cdot 0 = 0$ (кН)

При $x_1 = 2, M_1 = M_1 = 6 \cdot 2 = 12$ (кН)

Построим эпюры Q и M на участке ***1-1*** (рис. 1 *б* и *в*)***.***

На втором участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***2-2:*** $0 \leq x_2 \leq 6$

$$Q_2 = \sum F_{ky} = F - q \cdot x_2$$

При $x_2 = 0,\ Q_2 = 6 - 4 \cdot 0 = 6$ (кН)

При $x_2 = 6,\ Q_2 = 6 - 4 \cdot 6 = -18$ (кН)

$$M_2 = \sum M(F_k) = F(2 + x_2) - \frac{q \cdot x_2}{2} \cdot x_2$$

При $x_2 = 0,\ M_2 = 6 \cdot (2 + 0) - \frac{4 \cdot 0}{2} \cdot 0 = 12$ (кН · м)

При $x_2 = 6, M_2 = 6 \cdot (2 + 6) - \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot 6 = -24$ (кН · м)

Построим эпюры Q и M на участке ***2-2*** (рис. 1 *б* и *в*)***.*** Так как эпюра Q на втором участке проходит через нулевое значение, меняя знак с положительного на отрицательный, то в сечении, где $Q = 0$, на эпюре M имеет место максимальное значение. Чтобы найти его, определим значение координаты x_2^0, при котором $Q_2 = 0$.

$$Q_2 = F - q \cdot x_2^0 = 0$$

$$x_2^0 = \frac{F}{q} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \text{ (м)}$$

При $x_2^0 = 1{,}5$ (м)

$$M_2 = F(2 + x_2^0) - \frac{q \cdot (x_2^0)^2}{2} = 6(2 + 1{,}5) - \frac{4 \cdot 1{,}5^2}{2} = 16{,}5 \text{ (кН · м)}$$

Учитывая, что эпюра M описывается уравнением второго порядка, на участке ***2-2***, она ограничивается кривой.

Кривая эпюры M на втором участке проходит через нулевое значение, меняя знак с положительного на отрицательный. Найдем значение координаты x_2, при котором $M_2 = 0$.

$$M_2 = F(2 + x_2) - \frac{q \cdot (x_2)^2}{2} = 0$$

$$6(2 + x_2) - \frac{4 \cdot (x_2)^2}{2} = 0$$

$$12 + 6x_2 - 2(x_2)^2 = 0$$

Упрощая уравнение, получаем:

$$(x_2)^2 - 3x_2 - 6 = 0$$

Решая квадратное уравнение, получим корни квадратного уравнения:

$$(x_2)_1 = -1{,}37 \text{ (м)}$$

$$(x_2)_2 = 4{,}37 \text{ (м)}$$

Принимаем значение координаты при котором эпюра M пересекает нулевое значение $(x_2)_2 = 4{,}37$ (м).

Построим эпюры Q и M на участке ***2-2*** (рис. 1 *б* и *в*).

На третьем участке, отбросив правую часть от сечения, рассмотрим равновесие левой части балки.

Границы сечения ***3-3:*** $0 \le x_3 \le 2$

$$Q_3 = \sum F_{ky} = F - q \cdot b = 6 - 4 \cdot 6 = -18 \text{ (кН)}$$

$$M_3 = \sum M(F_k) = F(2 + b + x_3) - q \cdot b\left(\frac{b}{2} + x_3\right) + M$$

При $x_3 = 0$, $M_3 = 6 \cdot (2 + 6 + 0) - 4 \cdot 6\left(\frac{6}{2} + 0\right) + 16 = -8 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$

При $x_3 = 2$, $M_3 = 6 \cdot (2 + 6 + 2) - 4 \cdot 6\left(\frac{6}{2} + 2\right) + 16 = -44 \text{ (кН} \cdot \text{м)}$

Построим эпюры Q и M на участке ***3-3*** (рис. 1 *б* и *в*).

3. Сечение балки подбираем из условия прочности при изгибе

$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_x} \le [\sigma]$, откуда

$$W_x \ge \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{44 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0{,}275 \cdot 10^{-3} (\text{м}^3) = 275 (\text{см}^3)$$

По полученному значению W_x из таблицы 2 сортамента прокатной стали можно выбрать: двутавр №24, для которого $W_x = 289$ (см^3), $S = 34{,}8$ (см^2) и швеллер №27, для которого $W_x = 308$ (см^3), $S = 35{,}2$(см^2).

Таблица 2

Номер профиля	Швеллеры		Двутавры	
	Площадь сечения S, см^2	Момент сопротивления при изгибе W_x, см^3	Площадь сечения S, см^2	Момент сопротивления при изгибе W_x, см^3
5	6,16	9,1	-	-
6,5	7,51	15	-	-
8	8,98	22,4	-	-
10	10,9	34,8	12	39,7
12	13,3	50,6	14,7	54,8
14	15,6	70,2	17,4	81,7
16	18,1	93,4	20,2	109
18	20,7	121	23,4	143
20	23,4	152	26,8	184
22	26,7	192	30,6	232
24	30,6	242	34,8	289
27	35,2	308	40,2	371
30	4,05	387	46,5	472
33	46,5	484	53,8	597
36	53,4	601	61,9	743
40	61,5	761	72,6	953
45	-	-	84,7	1231
50	-	-	100,0	1589